



Luis Fernando Paulo Muñoz

**Análise Dinâmica de Vigas Apoiadas
em Fundação Elástica sob a Ação
de Cargas Móveis**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves
Co-orientador: Ney Augusto Dumont



Luis Fernando Paulo Muñoz

**Análise Dinâmica de Vigas Apoiadas
em Fundação Elástica sob a Ação
de Cargas Móveis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ney Augusto Dumont

Co-orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Departamento de Engenharia Civil – UFOP

Prof. João Luis Pascal Roehl

Consultor Independente

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de março de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luis Fernando Paulo Muñoz

Graduou-se em Engenharia Civil no Departamento de Engenharia Civil da UNSAAC (Universidad Nacional de San Antônio Abad Del Cusco), em 2006. Atualmente tem continuado com a linha de pesquisa na área de instabilidade e análise dinâmica não-linear de estruturas, com o estudo de análise de vigas submetidas a cargas móveis em contato com fundação elástica não-linear.

Ficha Catalográfica

Paullo Muñoz, Luis Fernando

Análise dinâmica de vigas apoiadas em fundação elástica sob a ação de cargas móveis / Luis Fernando Paulo Muñoz ; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientador: Ney Augusto Dumont. – 2010.

109 f. Il.; 29.7 cm

Dissertação (Mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2010.

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia civil – Teses. 2. Análise dinâmica linear. 3. Análise dinâmica não-linear. 4. Vigas prismáticas. 5. Fundação não-linear. 6. Séries de Fourier. 7. Cargas móveis. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Dumont, Ney Augusto. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

*Aos meus pais, Fernando e Rosa.
A minha irmã, Yesenia.*

Agradecimentos

A Deus, por permitir-me culminar mais uma etapa na minha vida.

A minha mãe Rosa e ao meu pai Fernando, a quem devo tudo o conseguido na vida. minha irmã Yesenia, que foi e é meu apoio nos momentos mais difíceis.

Ao Professor Paulo B. Gonçalves, pela orientação, serenidade e conhecimentos transmitidos.

À Comissão Examinadora, pelos aportes dados para a melhora do presente trabalho.

Aos professores do setor estruturas do DEC da PUC-Rio, pelo ensino acadêmico e motivação dada ao longo do mestrado.

À UNSAAC (Universidad de San Ant6nio Abad del Cusco), pela base necessária para afrontar o mestrado, em especial ao professor Roehl, Ney e Raul.

Aos colegas da PUC-Rio, Alejandra, Evelin, Jackeline Liliana, Liset, Roxana, Tania, Carlos, Gino, Iván, Gerson, Rafael e os demais colegas da Pós, pela ajuda acadêmica, pessoal e pelos momentos de convívio.

Ao pessoal administrativo do Departamento de Engenharia Civil, em especial a Rita de Cássia, pelo apoio constante.

À CNPq e à PUC-Rio, pelo auxílio financeiro.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram com a elaboração deste trabalho.

Resumo

Paullo Muñoz, Luis Fernando; Gonçalves, Paulo Batista (orientador), Dumont, Ney Augusto Dumont (co-orientador). **Análise Dinâmica de Vigas Apoiadas em Fundação Elástica sob a Ação de Cargas Móveis.** Rio de Janeiro, 2010. 109p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A análise de vigas sobre base elástica submetidas a cargas estáticas e dinâmicas tem grande importância na engenharia estrutural e fornece ferramentas úteis para resolver problemas práticos como o projeto de fundações e vias férreas, entre outros. Um caso particularmente importante é o estudo do comportamento dinâmico destes elementos estruturais na presença de cargas móveis. Apresenta-se nesta dissertação a análise de vigas prismáticas de comprimento infinito repousando sobre uma fundação elástica do tipo Winkler, submetida à ação de cargas móveis e forças axiais de compressão. Consideram-se cargas concentradas e uniformemente distribuídas em um trecho finito de magnitude constante ou com variação harmônica. A viga é descrita pela teoria linear de Euler-Bernoulli (teoria clássica de vigas) e de Rayleigh (considerando inércia rotacional). A fundação é descrita por uma lei constitutiva não-linear cúbica. Para o caso linear se obtém uma solução analítica exata usando transformadas duplas de Fourier. Emprega-se também o método de Galerkin para a análise do problema linear e não-linear. Para isto, usam-se como funções de forma os modos de vibração livre de vigas finitas e séries de Fourier, sendo o problema resolvido analiticamente no domínio do tempo no caso linear e, mediante integração numérica das equações de movimento no caso não-linear. Apresenta-se uma análise paramétrica para o caso linear, comparando os resultados obtidos pelo método de Galerkin com a solução exata. Para o caso não-linear, estuda-se a influência da não-linearidade da fundação, do raio de giração da seção da viga, da magnitude da força axial compressiva, da velocidade de deslocamento da carga transversal e da variação da amplitude da carga harmônica, nos deslocamentos da viga.

Palavras-chave

Análise dinâmica linear; análise dinâmica não-linear; vigas prismáticas; fundação não-linear; séries de Fourier; cargas móveis.

Abstract

Paullo Muñoz, Luis Fernando; Gonçalves, Paulo Batista (advisor), Dumont, Ney Augusto Dumont (co-advisor). **Dynamic Analysis of a Beam on an Elastic Foundation under Moving Loads**. Rio de Janeiro, 2010. 109p. M. SC. Dissertation - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The analysis of beams on elastic foundation subjected to static and dynamic loads is of great importance in structural engineering and provides useful tools to solve practical problems such as the design of foundations and railways, among others. A particularly important case is the study of the dynamic behavior of these structural elements in the presence of moving loads. This dissertation presents the analysis of prismatic beams of infinite length resting on a Winkler-type elastic foundation, subjected to the action of moving loads and compressive axial forces. Concentrated and uniformly distributed loads of a finite length with constant magnitude or harmonic variation are considered. The beam is described by the linear Euler-Bernoulli theory (classical beam theory), considering the effect of rotational inertia (Rayleigh theory). The nonlinear foundation is described by a cubic constitutive law. For the linear case, an exact analytical solution is obtained using the Fourier transform. The Galerkin method is also employed for analyzing both the linear and nonlinear problems. For this, the free vibration modes of simply-supported or clamped beams, Legendre polynomials and Fourier series are used as interpolating functions. The resulting discretized equations of motion are solved analytically in time domain in the linear case and by numerical integration in the nonlinear case. A parametric analysis for the linear case is conducted, comparing the results obtained by the Galerkin method with the exact solution. For the nonlinear problem, the influence of the nonlinearity of the foundation, the radius of gyration of the beam cross-section, the magnitude of the axial compressive force, the velocity of the moving load and the magnitude and frequency of the moving harmonic loads on the displacements of the beam are studied in detailed.

Keywords

Linear dynamic analysis; Fourier series; nonlinear dynamic analysis; beams; nonlinear foundation; moving loads.

Sumário

Resumo	6
Abstract	8
Sumário	10
Listas de Figuras	14
Listas de Tabelas	18
Lista de Símbolos	19
1 Introdução	23
1.1. Revisão Bibliográfica	25
1.2. Objetivos	28
1.3. Organização e Descrição do Trabalho	29
2 Formulação do Problema	30
2.1. Dedução da Equação de Movimento de uma Viga sobre Fundação Elástica.	30
2.2. Consideração da Fundação Elástica	32
2.2.1. Modelo de Winkler	32
2.2.2. Modelos de dois parâmetros	33
2.2.2.1. Modelo de Filonenko-Borodich	33
2.2.2.2. Modelo de Hetenyi	34
2.2.2.3. Modelo de Pasternak	34
2.2.3. Escolha do modelo de fundação elástica	35
2.3. Mudança de Coordenada do Espaço para Consideração de Cargas Móveis	35

3 Solução Analítica Exata para Viga Infinita no Caso Linear	37
3.1. Solução por Transformada Dupla de Fourier	37
3.2. Resposta para Carga Concentrada:	39
3.2.1. Resposta para Carga Concentrada Harmônica	40
3.2.2. Resposta para carga concentrada constante	40
3.3. Resposta para Carga Uniformemente Distribuída	41
3.3.1. Resposta para carga distribuída uniforme harmônica	42
3.3.2. Resposta para carga distribuída uniforme constante	42
3.4. Avaliação Numérica da Resposta Analítica Exata por FFT e IFFT	42
3.4.1. Transformada discreta rápida inversa IFFT unidimensional	43
3.4.2. Avaliação numérica da resposta por IFFT unidimensional	44
4 Solução Aproximada pelo Método de Galerkin	46
4.1. Método dos Resíduos Ponderados	46
4.2. Método de Galerkin	47
4.3. Discretização do Domínio Infinito em um Domínio Finito Aproximado	47
4.4. Solução Aproximada Considerando Simetria da Resposta	48
4.4.1. Aproximação por modos de vibração de viga bi-engastada.	49
4.4.2. Aproximação por polinômios de Legendre:	50
4.4.3. Aproximação por modos de vibração de viga bi-apoiada	51
4.5. Solução Aproximada Considerando Resposta Assimétrica	52
4.5.1. Aproximação por série completa de Fourier	53
4.5.2. Aproximação por polinômios ortogonais	55
5 Exemplos Numéricos do Caso Linear	56
5.1. Comparação Entre a Solução Exata e a Solução Aproximada Simétrica	56
5.1.1. Comparação entre as funções de aproximação para uma viga com carga concentrada estática	56
5.1.1.1. Influência do número de funções de aproximação “ N ”	57
5.1.1.2. Influência do comprimento de integração “ L ”	59
5.1.2. Convergência da aproximação para uma viga com carga concentrada estática	60
5.1.3. Escolha do tipo de função de aproximação para o caso simétrico	61

5.1.4. Análise paramétrica para viga com carga móvel distribuída de magnitude constante	61
5.1.4.1. Influência do raio de giração	62
5.1.4.2. Influência da rigidez da fundação	62
5.1.4.3. Influência da velocidade do carregamento	64
5.2. Comparação Entre a Solução Exata e a Solução Aproximada com Formulação Assimétrica	66
5.2.1. Comparação entre as funções de aproximação para uma viga com carga concentrada móvel	67
5.2.1.1. Influência do número de funções de aproximação “ N ” para velocidade igual à velocidade crítica	67
5.2.1.2. Influência do comprimento de discretização “ L ” para velocidade maior que a velocidade crítica	69
5.2.1.3. Escolha do tipo de função de aproximação para o caso assimétrico	70
5.2.2. Análise paramétrica, para viga com carga móvel distribuída e assimetria na resposta	71
5.2.2.1. Influência do número de funções de aproximação “ N ” para velocidade maior à velocidade crítica	71
5.2.2.2. Influência da velocidade do carregamento e raio de giração, nos deslocamentos máximos	72
5.2.2.3. Influência da força axial e a rigidez da fundação.	73
5.2.2.4. Influência da força axial na velocidade crítica	73
5.3. Considerações Finais da Análise Linear	74
6 Formulação para Análise com Fundação Não-Linear	76
6.1. Fundação Elástica Não-Linear	76
6.2. Equação de Movimento Não-linear Adimensional	77
6.3. Solução Aproximada Não-linear Adimensional pelo Método de Galerkin	78
6.3.1. Solução aproximada não-linear com simetria na resposta	78
6.3.2. Solução aproximada não-linear com assimetria na resposta.	80
6.4. Resolução do Sistema de Equações por Integração Numérica.	83

7 Exemplos Numéricos do Caso Não-Linear	84
7.1. Influência da Não-linearidade da Fundação no Caso simétrico, Para Carga Distribuída Constante	84
7.1.1. Influência do sinal do parâmetro de rigidez não-linear da fundação	85
7.1.2. Influência na fase transiente.	86
7.1.3. Influência na configuração deformada na fase permanente.	87
7.1.4. Influência da não-linearidade e da inércia rotacional nos deslocamentos na fase permanente.	88
7.2. Influência da Não-linearidade da Fundação para Altas Velocidades e Carga Distribuída de Amplitude Constante.	90
7.2.1. Influência da não-linearidade da fundação na configuração deformada da fase permanente	91
7.2.2. Influência da não-linearidade e variação de velocidade	92
7.3. Análise Não-Linear com Carga Harmônica	93
7.3.1. Análise não-linear com carga harmônica estacionária	94
7.3.1.1. Influência na fase transiente e fase permanente	95
7.3.1.2. Influência da frequência de excitação nos deslocamentos máximos	96
7.3.2. Análise não-linear com carga harmônica móvel	98
7.3.2.1. Influência nos deslocamentos para baixas velocidades	98
7.3.2.2. Influência nos deslocamentos para altas velocidades	99
7.3.2.3. Influência da velocidade nos deslocamentos máximo	100
8 Conclusões e Sugestões	102
8.1. Conclusões	102
8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	104
9 Referências Bibliográficas	106

Listas de Figuras

Figura 2.1 – Porção de viga prismática, apoiada sobre fundação elástica com amortecimento viscoso, submetida a carregamento transversal e força axial.	30
Figura 2.2 – Diagrama de corpo livre de um elemento diferencial de viga sobre base elástica.	30
Figura 2.3 – Modelo de fundação elástica de Winkler.	32
Figura 2.4 – Modelo de fundação elástica de Filonenko-Borodich.	33
Figura 2.5 – Modelo de fundação elástica de Pasternak.	34
Figura 3.1 – Viga submetida a carga móvel concentrada.	39
Figura 3.2 – Viga submetida a carga móvel uniformemente distribuída.	41
Figura 3.3 – Porção de viga infinita avaliada na IFFT.	44
Figura 4.1 – Domínio discreto centrado com respeito à origem.	48
Figura 4.2 – Forma das funções de aproximação, considerando modos de vibração de metade de viga bi-engastada.	50
Figura 4.3 – – Forma das funções de aproximação considerando a metade de viga bi-engastada.	51
Figura 4.4 – Forma das funções de aproximação, considerando modos de vibração de metade de viga bi-apoiada.	51
Figura 5.1 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada simétrica usando os modos de viga bi-engastada: $C = 0.01Cr$, $L = 2.5m$, $V = 0$.	57
Figura 5.2 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada simétrica usando polinômios de Legendre: $C = 0.10Cr$, $L = 2.5m$, $V = 0$.	58
Figura 5.3 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada simétrica usando modos de viga bi-apoiada: $C = 0.1Cr$, $L = 2.5m$, $V = 0$.	58

- Figura 5.4 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada simétrica: a) modos de viga bi-engastada; b) polinômios de Legendre; c) modos de viga bi-apoiada; $C = 0.01Cr$, $V = 0$, $N = 7$. 59
- Figura 5.5 – Convergência do deslocamento máximo. 60
- Figura 5.6 – Comparação do deslocamento vertical na fase permanente entre a solução analítica e Galerkin: $C = 0.01Cr$, $V = 130.0$ m/s, $P = -2MN$, $N = 15$, $L = 3$ m. 62
- Figura 5.7 – Resposta na fase permanente para distintos valores de k : $C = 0.01Cr$, $V = 130.0$ m/s, $P = 0$, $N = 50$, $L = 5$ m, $r = 0.0$ m. 63
- Figura 5.8 – Deslocamentos máximos para distintos valores de k e r . $C = 0$, $V = 130.0$ m/s, $P = 0$, $N = 50$, $L = 5$ m. 63
- Figura 5.9 – Deslocamentos máximos para distintos valores de k e V . $C = 0$, $r = 0.08$ m, $P = 0$, $N = 50$, $L = 5$ m. 64
- Figura 5.10 – Deslocamento máximo em função de V para distintos valores de r . $C = 0.05Cr$, $P = -2MN$, $N = 50$, $L = 8$ m. 65
- Figura 5.11 – Comportamento da deformada solução analítica para distintos valores de velocidade, quando $C = 0.05Cr$, $P = -2MN$ e $r = 0.08$ m. 66
- Figura 5.12 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada assimétrica por polinômios de Legendre: $C = 0.05Cr$, $L = 5$ m, $V = 170$ m/s ($V/V_{cr} = 1$), $r = 0$. 68
- Figura 5.13 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada assimétrica por séries de Fourier. $C = 0.05Cr$, $L = 5$ m, $V = 170$ m/s ($V/V_{cr} = 1$), $r = 0$. 68
- Figura 5.14 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada assimétrica por polinômios de Legendre. $C = 0.05Cr$, $N = 6$, $V = 170$ m/s, $r = 0$. 69
- Figura 5.15 – Comparação entre a resposta exata e resposta aproximada assimétrica por séries de Fourier: $C = 0.05Cr$, $N = 15$, $V = 170$ m/s ($V/V_{cr} = 1$), $r = 0$. 70
- Figura 5.16 – Comparação entre a resposta analítica e a resposta aproximada assimétrica por séries de Fourier: $C = 0.05Cr$, $L = 15$ m, $r = 0$ m, $P = -2MN$, $V = 180$ m/s ($V/V_{cr} = 1.1$). 71

- Figura 5.17 – Deslocamentos máximos em função da Velocidade para distintos valores de r : $C = 0.05Cr$, $P = -2MN$, $N = 50$, $L = 8m$. 72
- Figura 5.18 – Deslocamentos máximos para distintos valores de k e P : $C = 0$, $r = 0.08 m$, $V = 50m/s$, $N = 50$, $L = 5m$. 73
- Figura 5.19 – Velocidade crítica em função da força axial: $C = 0.05C_r$, $N = 50$, $L = 8m$. 74
- Figura 7.1 – Variação de deslocamento máximo em função da carga para valores positivos de β_3 : $\zeta = 0$, $C_1 = 0.05C_1cr$, $f_1 = 0$, $P_1 = 0$, $\rho = 0$, $N=15$. 85
- Figura 7.2 – Variação de deslocamento máximo em função da carga para valores negativos de β_3 , ($\zeta=0$), $C_1=0.05C_1cr$, $f_1=0$, $P_1=0$, $\rho=0$ $N=15$. 86
- Figura 7.3 – Fase transiente do deslocamento em $\zeta=0$. $C_1 = 0.01C_1cr$, $f_1 = 20$, $P_1 = 0$, $\rho = 0$, $N = 15$ e $\beta_3 = -82.96 \times 10^8$. 86
- Figura 7.4 – Deslocamentos adimensionais na fase permanente: $f_1 = 40$, $\rho = 0$, $C_1 = 0.05C_1cr$, $P_1 = -1.7418$, $N = 15$, $\beta_3 = -82.96 \times 10^8$. 87
- Figura 7.5 – Influência da não-linearidade e da inércia rotacional da viga nos deslocamentos na fase permanente: $C_1 = 0.05C_1cr$, $f_1 = 40$, $P_1 = -1.7418$, $N = 15$, $\beta_3 = -82.96 \times 10^6$. 88
- Figura 7.6 – Deslocamento máximo em função de ρ : $C_1 = 0.05C_1cr$, $f_1 = 40$, $P = -1.7418$, $N = 15$, $\beta_3 = -82.96 \times 10^8$. 89
- Figura 7.7 – Deslocamento vertical adimensional para velocidade crítica: $C_1 = 0.04C_1r$, $f_1 = 25.25(f_{1= f_{1cr}})$, $P_1 = -35.69$, $N = 15$, $\rho = 0$. 91
- Figura 7.8 – Deslocamento adimensional para velocidade superior à crítica: $C_1 = 0.04C_1cr$, $f_1 = 25.0 (f_1=1.2 f_{1cr})$, $P_1 = -35.69$, $N = 15$, $\rho = 0$. 92
- Figura 7.9 – Deslocamento máximo em função da velocidade. $C_1 = 0.04C_1cr$, $P_1 = -35.69$, $N = 15$, $\rho = 0.01$. 93
- Figura 7.10 – Fase transiente do deslocamento em $\zeta = 0$, $C_1 = 0.01C_1cr$, $f_1 = 0$, $P_1 = 0$, $N = 20$, $\rho = 0$, $f = 70$ Hz. 95
- Figura 7.11 – Fase Permanente do deslocamento em $\zeta = 0$: $C_1 = 0.01C_1cr$, $f_1 = 0$, $P_1=0$, $N = 20$, $\rho=0$, $f = 70$ Hz. 96

Figura 7.12 – Variação do deslocamento máximo em função de f : $f_1=0$, $P_1 = 0$, $C_1 = 0.05C_1cr$, $\beta_3 = -212.38 \times 10^{10}$. 97

Figura 7.13 – Deslocamento vs ζ : $C_1 = 0.05C_1cr$, $f_1 = 5$, $P_1 = -8.933$, $\rho = 0.008$, $f = 50\text{Hz}$, $t = 0.505\text{s}$ (tempo onde há um máximo de amplitude). 98

Figura 7. 14 – Deslocamento vs ζ : $C_1 = 0.05C_1cr$, $f_1 = 10$, $P_1 = -8.933$, $\rho = 0.008$, $f = 50\text{Hz}$, $t = 0.506\text{s}$ (tempo onde há um máximo de amplitude). 99

Figura 7. 15 – Deslocamento máximo em função da velocidade: $P_1 = -8.933$, $C_1 = 0.05C_1cr$, $\rho = 0.008$, $f = 50\text{Hz}$. 101

Listas de Tabelas

Tabela 5-1 Parâmetros do sistema	56
Tabela 5-2 Convergência do método de Galerkin no cálculo do deslocamento máximo.	60
Tabela 5-3 Parâmetros de carregamento distribuído.	61
Tabela 7-1 Parâmetros adimensionais para análise do comportamento simétrico.	84
Tabela 7-2 Parâmetros adimensionais para análise do comportamento assimétrico.	90
Tabela 7-3 Parâmetros adimensionais para análise de carga harmônica estacionária.	94

Lista de Símbolos

a	Extensão do carregamento transversal uniforme;
A_n	Amplitude arbitrária da função de aproximação ϕ_n ;
$A_j(\zeta)$	Função que descreve os modos de vibração simétricos na coordenada adimensional;
$B_j(\zeta)$	Função que descreve os modos de vibração anti-simétricos na coordenada adimensional;
C	Coefficiente de amortecimento;
Ccr	Parâmetro adimensional de amortecimento;
C_1	Coefficiente de amortecimento;
C_1cr	Coefficiente de amortecimento crítico;
D	Rigidez à flexão;
D_n	Enésimo coeficiente de amortecimento em equação de movimento;
Ds_n	Enésimo coeficiente de amortecimento em equação de movimento adimensional;
E	Módulo de elasticidade de Young;
EqL_j	Parcela linear de sistema de equações diferenciais
$EqNL_j$	Parcela não-linear de sistema de equações diferenciais
f	Frequência de excitação de carregamento harmônico.
f_1	Parâmetro adimensional de velocidade de carregamento;
f_1cr	Parâmetro adimensional de velocidade crítica;
f_i	Valor i -ésimo de função discreta;
$f(\eta)$	Função arbitrária dependente da coordenada móvel;
$f(t)$	Função arbitrária dependente do tempo;
$f(x)$	Função arbitrária dependente da coordenada x ;
F	Função resposta de uma equação diferencial;
FR	Resultante do carregamento distribuído;
F_n	Valor enésimo de função transformada discreta;
$F(\xi)$	Transformada de Fourier da função $f(\eta)$;
$Fa(x,t)$	Função de força de amortecimento em qualquer ponto da viga;
$Fi(x,t)$	Função de força de inércia em qualquer ponto da viga;
G	Rigidez da fundação ao cisalhamento;
$H(..)$	Função Heaviside;
I	Momento de inércia da seção da viga;
j	Índice contador de uma série de elementos;
k	Coefficiente de rigidez linear da fundação;
k_3	Coefficiente de rigidez não-linear da fundação;

K_n	Enésimo coeficiente de rigidez numa equação de movimento;
Ks_n	Enésimo coeficiente de rigidez numa equação de movimento adimensional;
L	Metade do comprimento de discretização do espaço;
m	Massa da viga por unidade de comprimento;
M_n	Enésimo coeficiente de inércia numa equação de movimento;
Ms_n	Enésimo coeficiente de inércia numa equação de movimento adimensional;
$M(x,t)$	Função de momento fletor em qualquer ponto da viga;
n	Número contador associado a uma equação;
N	Número total de elementos associado ao contador n ;
P	Força axial compressiva;
P_1	Parâmetro adimensional de força axial compressiva;
q	Intensidade do carregamento uniforme;
$q(x,t)$	Função do carregamento transversal arbitrário em coordenadas fixas;
$q(\eta,t)$	Função do carregamento transversal na coordenada móvel;
$q(\zeta,t)$	Função do carregamento transversal adimensionalizado;
Q	Carga transversal concentrada;
Q_1	Intensidade da carga transversal distribuída adimensionalizada;
$Q(\xi,\Omega)$	Transformada dupla de Fourier da função $q(\eta,t)$;
r	Raio de giração da seção da viga;
R	Resíduo a minimizar;
$Rf(x,t)$	Reação da fundação elástica em qualquer ponto da viga;
PA_n	Enésimo polinômio anti-simétrico de Legendre;
$PS_n(\eta)$	Enésimo polinômio simétrico de Legendre;
t	Tempo;
T	Força de tração;
$T_n(t)$	Amplitude da função $X_n(\eta)$ dependente do tempo;
$V(x,t)$	Esforço cortante em qualquer ponto da viga;
V	Velocidade de deslocamento da carga;
V_{cr}	Velocidade crítica;
$w(x,t)$	Campo de deslocamentos transversais em coordenadas fixas;
$w(\eta,t)$	Campo de deslocamentos transversais na coordenada móvel;
$w^*(\zeta,t)$	Campo de deslocamentos transversais adimensionais;
W_n	Enésima componente complexa da transformada rápida de Fourier;
$W(\xi,\Omega)$	Transformada dupla de Fourier da função $w(\eta,t)$;
x	Coordenada axial do espaço;
x_0	Valor arbitrário constante para a coordenada x ;
$X_n(\eta)$	Enésima função de aproximação dependente do espaço móvel;
$X_n(\zeta)$	Enésima função de aproximação dependente da coordenada adimensional;
Y_n	Enésima componente par da transformada rápida de Fourier;
z	Coordenada transversal do espaço;
Z_n	Enésima componente ímpar da transformada rápida de Fourier;

Operadores

$conj(..)$	Operador que calcula o par conjugado de um número complexo;
$Div(..)$	Operador que toma a parte inteira um número real;
$\mathfrak{F}(..)$	Operador que aplica a transformada de Fourier;
$\mathfrak{F}^{-1}(..)$	Operador que aplica a transformada inversa de Fourier;

Símbolos gregos

α	Parâmetro adimensional de extensão de carregamento;
β_1	Parâmetro adimensional linear de rigidez da fundação;
β_3	Parâmetro adimensional não-linear de rigidez da fundação;
Γ	Domínio arbitrário;
$\delta(..)$	Função delta de Dirac;
ζ	Coordenada adimensional do espaço móvel;
Δ	Fração ou incremento de uma grandeza;
η	Coordenada do espaço móvel;
λ	Parâmetro de rigidez usado na resposta de viga infinita sob carga concentrada estática;
ξ	Coordenada transformada do espaço móvel;
$\theta(x,t)$	Campo de rotações em coordenadas fixas no espaço;
ℓ	Comprimento de discretização do espaço móvel;
ρ	Parâmetro adimensional de inércia rotacional;
T_1	Parâmetro adimensional de inércia translacional;
ϕ_n	Enésima função de aproximação;
$\psi_j(..)$	Função de ponderação
Ψ	Função arbitrária de ponderação;
Ω	Coordenada transformada do tempo;
ω	Frequência circular de excitação da carga harmônica;

“Engineers ... are not superhuman. They make mistakes in their assumptions, in their calculations, in their conclusions. That they make mistakes is forgivable; that they catch them is imperative. Thus it is the essence of modern engineering not only to be able to check one’s own work but also to have one’s work checked and to be able to check the work of others.”

Henry Petrosky